ANALISI MATEMATICA L-C, B-S 2005-06

DISTRIBUZIONI

MASSIMO CICOGNANI

Per la pubblicazione in rete di queste dispense si deve ringraziare Marco Frison che le ha trascritte interamente in Latex

1 Introduzione

Indichiamo con $AC_{loc}(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni "localmente assolutamente continue", cioè lo spazio delle funzioni che su **ogni intervallo limitato** I di $\mathbb{R}$ godono delle seguenti proprietà:

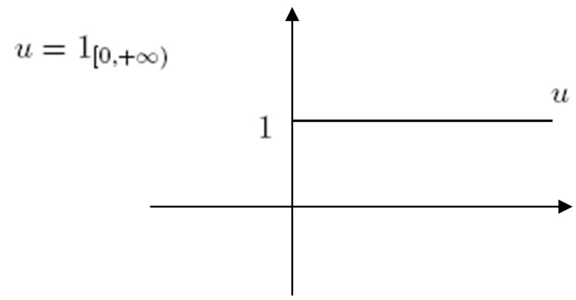
- sono continue in I;
- derivabili quasi ovunque in I;
- la derivata è sommabile in I.

Per $x \in AC_{loc}$ vale la formula di ricostruzione attraverso x':

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x'(s)ds \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

con t_0 un qualunque punto fissato. AC_{loc} è il più grande spazio dove vale questa formula; oltre la usuale derivata non consente di ricostruire $x(t)$.

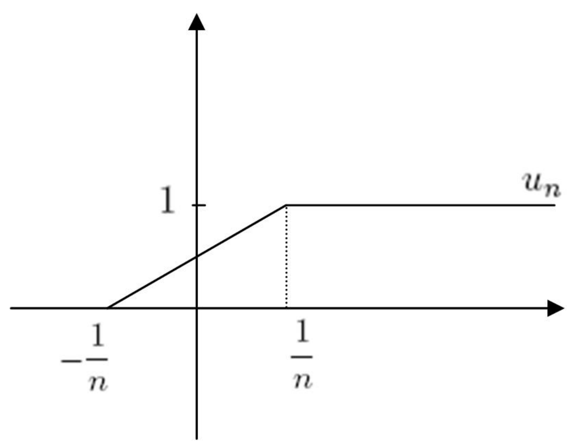
Un esempio semplice è dato dalla funzione gradino unitario



La derivata u' esiste per ogni $t \neq 0$ ed è la funzione nulla però

$$u(t_0) + \int_{t_0}^{t} u'(s)ds \quad \Big(= u(t_0) \Big)$$

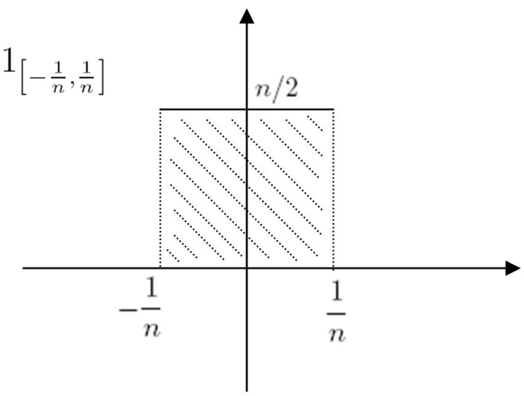
non coincide con $u(t)$ su metà dell'asse reale.
Si può pensare di approssimare u attraverso u_n come in figura



La successione u_n converge puntualmente ad u per $t \neq 0$.

Le derivate u_n' sono definite per $t \neq \pm\dfrac{1}{n}$ e, a parte gli estremi,

$$u_n' = \frac{n}{2}\, 1_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}$$



$$\forall\, n \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u_n'(t)dt = 1.$$

La successione u_n' ha limite

$$u_n'(t) \longrightarrow \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

e, contrariamente ad ogni u_n', il limite puntuale ha integrale nullo.
Con il concetto di limite puntuale non si riesce a "concentrare nell'origine la massa unitaria" come suggerirebbe invece l'andamento delle u_n' pensate come densità di massa lineare. Le usuali operazione di limite e di derivata non sono applicabili in problemi modellizzati da funzioni non assolutamente continue. Inoltre, come visto in esercizi, la regola $\widehat{x'}(\omega) = i\omega\widehat{x}(\omega)$ non si applica a funzioni non assolutamente continue.
Poichè in molte applicazioni le funzioni con salti sono fondamentali, occorre introdurre una estensione dei concetti di limite, derivata, trasformata.

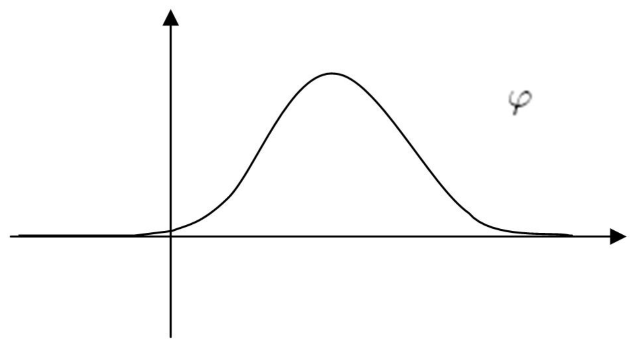
• **Le funzioni test**
Una funzione test φ è una funzione $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ con le seguenti proprietà:

1. $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$;

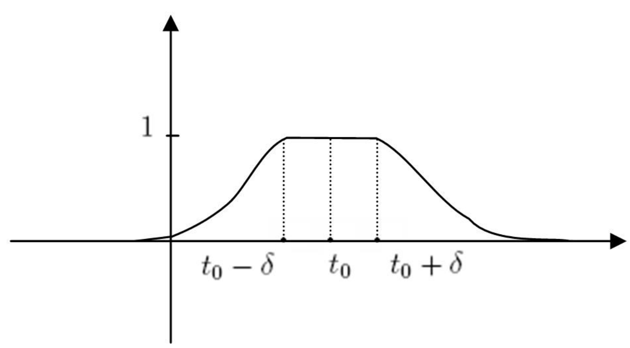
2. esiste un insieme **chiuso e limitato** $K \subset \mathbb{R}$ tale che

$$\forall\, t \notin K \quad \varphi(t) = 0.$$

Il più grande chiuso al di fuori del quale una generica f è nulla si chiama il **supporto** di f. **Le funzioni test sono quindi le funzioni C^∞ a supporto compatto** (compatto in $\mathbb{R}^n$ = chiuso e limitato).



Vengono spesso usate per "localizzare": se $\varphi(t) = 1$ per $t_0 - \delta < t < t_0 + \delta$ e $\varphi(t) = 0$ per $t \notin K$ con supporto K non troppo più largo dell'intervallo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, allora la regolarità in t_0 di una funzione f sarà la stessa di φf



e se f è sommabile negli intorni di t_0 allora

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} f(t)dt \cong \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt.$$

Indichiamo con $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ lo spazio di tutte le funzioni test e con $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ **lo spazio delle funzioni localmente sommabili** cioè lo spazio delle funzioni $f \in L^1(I)$ per ogni intervallo **limitato** di $\mathbb{R}$. Vale:

Teorema 1.1
Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt = 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \iff f = 0 \ \text{ quasi ovunque.}$$

In particolare per $f, g \in L^1_{loc}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi(t)dt \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \iff f = g \ \text{ quasi ovunque.}$$

Ogni $f \in L^1_{loc}$ è quindi identificabile attraverso la corrispondenza **lineare**

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \varphi \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt.$$

Introduciamo una convergenza in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Diremo che $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ se:

1. esiste un compatto K di $\mathbb{R}$ che racchiude tutti i supporti delle φ_n e di φ;
2. per ogni $j \geq 0$, $\varphi_n^{(j)} \longrightarrow \varphi^{(j)}$ **uniformemente su** K (quindi su $\mathbb{R}$ per il punto precedente).

Per il teorema della convergenza dominata, fissata $f \in L^1_{loc}$,

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_n(t)dt \xrightarrow{\mathbb{C}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt$$

quindi la corrispondenza

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \varphi \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt$$

che identifica f è una applicazione **lineare e continua** da $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ in $\mathbb{C}$.
Ogni applicazione lineare e continua da uno spazio vettoriale complesso X sul campo $\mathbb{C}$ degli scalari si chiama un **funzionale** e lo spazio dei funzionali si indica con X'. Le considerazioni precedenti portano ad identificare L^1_{loc} con un sottospazio di $\mathcal{D}'$ identificando $f \in L^1_{loc}$ col funzionale

$$\varphi \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt.$$

All'interno di $\mathcal{D}'$ verranno definite le estensioni dei concetti di limite, derivata, trasformata.

• Definizione di distribuzione
Ogni elemento di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ viene chiamato **distribuzione** o **funzione generalizzata**. Una distribuzione u è quindi un funzionale

$$u : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \varphi \longmapsto u(\varphi).$$

Spesso il numero complesso $u(\varphi)$ viene indicato anche con $\langle u, \varphi \rangle$.
Inoltre viene usata anche la notazione $u(t)$ per indicare che t è la variabile delle **funzioni test** (non di u!) e si scrive

$$\langle u(t), \varphi(t) \rangle$$

sempre per indicare il numero complesso $u(\varphi)$ corrispondente alla generica funzione test φ attraverso il funzionale u. La variabile di u è φ.
Per quanto visto, ogni $f \in L^1_{loc}$ si identifica con una distribuzione attraverso

$$\langle f(t), \varphi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt,$$

così, ad esempio,

$$\begin{aligned}
\langle H(t), \varphi(t) \rangle &= \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt, \qquad H \text{ gradino unitario;} \\
\langle 1_{[a,b]}, \varphi(t) \rangle &= \int_a^b \varphi(t)dt; \\
\langle 1, \varphi(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt; \\
\langle \operatorname{sgn}(t), \varphi(t) \rangle &= \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt - \int_{-\infty}^0 \varphi(t)dt; \\
\langle e^{i\omega_0 t}, \varphi(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 t}\varphi(t)dt; \\
\langle \log|t|, \varphi(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \log|t|\varphi(t)dt,
\end{aligned}$$

che ha significato perchè $\log|t|$ è localmente sommabile:

$$\int_0^\varepsilon |\log t| dt = \int_0^\varepsilon -\log t = [-t\log t]_0^\varepsilon + \int_0^\varepsilon t \cdot \frac{1}{t} dt =$$

$$= -\varepsilon \log \varepsilon + \varepsilon < +\infty \qquad (0 < \varepsilon \leq 1)$$

$$\Big(t \log t \longrightarrow 0 \text{ per } \delta \longrightarrow 0 \Big).$$

L^1_{loc} non esaurisce tutti i funzionali. Sono distribuzioni (notevoli) anche le due seguenti che non si identificano con alcuna $f \in L^1_{loc}$.

• La delta di Dirac

La distribuzione definita δ da

$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle = \varphi(0)$$

è nota come **delta di Dirac**. Non esiste alcuna $f \in L^1_{loc}$ tale che

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t) dt \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}.$$

• Il valor principale di $\frac{1}{t}$

La funzione $\log|t|$ è una distribuzione ma la sua derivata usuale $\frac{1}{t}$ non lo è perchè non è localmente sommabile

$$\int_0^\varepsilon \frac{1}{t} dt = [\log t]_0^\varepsilon = \varepsilon - \lim_{t \to 0} \log t = +\infty.$$

Non si può scrivere per tutte le $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt.$$

Tale scrittura ha senso solo quando $\varphi(0) = 0$. Infatti, in tal caso,

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \varphi'(t) = \varphi'(0)$$

e l'integranda è sommabile perchè la singolarità per $t = 0$ è eliminabile. Analogalmente è sommabile

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$$

qualunque sia φ, anche con $\varphi(0) \neq 0$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0).$$

L'applicazione

$$\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \varphi \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} dt$$

è lineare e continua quindi una distribuzione. Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} dt = \lim_{\substack{R \to +\infty \\ \epsilon \to 0}} \int_{-R}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{R},$$

ma per **simmetria dispari**

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{1}{t} dt + \int_{\epsilon}^{R} \frac{1}{t} dt = 0,$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} dt = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|t| \geq \epsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt.$$

La distribuzione $vp\,\frac{1}{t}$, definita in maniera equivalente da

$$\langle vp\,\frac{1}{t}, \varphi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} dt$$

o

$$\langle vp\,\frac{1}{t}, \varphi(t) \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|t| \geq \epsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt,$$

si chiama **valor principale** di $\dfrac{1}{t}$.

Spesso, specialmente nei manuali di Ingegneria, viene indicata con $\frac{1}{t}$ ma non va confusa con la **funzione** $\frac{1}{t}$ **che non è una distribuzione**. Il contesto chiarisce se $\frac{1}{t}$ indica la usuale funzione o la distribuzione $vp\,\frac{1}{t}$ $\Big($sicuramente se si parla di trasformata di Fourier non ci si può riferire alle **funzioni** $\frac{1}{t}$ o $\frac{1}{\omega}$ nè come oggetto da trasformare nè come risultato di una trasformazione$\Big)$.

2 Operazioni con le distribuzioni

• Limiti

Per u_n successione e u in $\mathcal{D}'$ diremo che $u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u$ se

$$\langle u_n, \varphi\rangle \xrightarrow{\mathbb{C}} \langle u, \varphi\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}.$$

Quindi per $f_n(t) \in L^1(\mathbb{R})$ con convergenza puntuale $f_n(t) \xrightarrow{\mathbb{C}} f(t)$ per quasi ogni t, e dominata

$$\forall\, n \;\; |f_n(t)| \leq |g(t)|, \qquad g \in L^1(\mathbb{R}),$$

si ha anche

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} f.$$

Infatti per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \langle f_n(t), \varphi(t)\rangle &= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\varphi(t)dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt\end{aligned}$$

visto che φ è limitata e

$$\forall\, n \quad |f_n(t)\varphi(t)| \leq M|g(t)|, \qquad Mg \in L^1.$$

Anche per $f_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ $\quad\Big(f_n \xrightarrow{\mathbb{C}} f(t)$ quasi ovunque, $|f_n(t)| \leq M \;\; \forall\, n\Big)$ si ha $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} f$. Infatti per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\varphi(t)dt \xrightarrow{\mathbb{C}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt$$

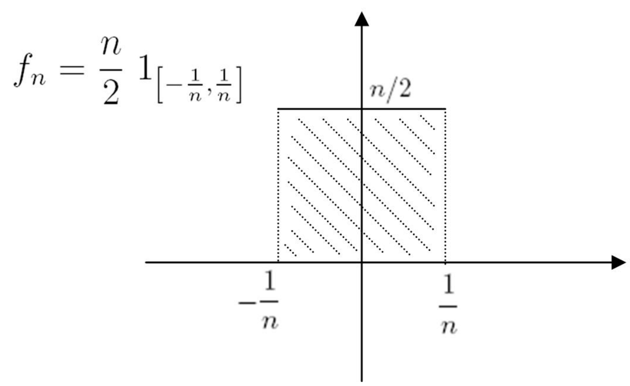
grazie alla convergenza dominata

$$|f_n(t)\varphi(t)| \le M|\varphi(t)|, \qquad M\varphi \in L^1(\mathbb{R}).$$

Ad esempio

$$1_{[-n,n]} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 1.$$

Nessuno di questi due casi si applica alla successione



incontrata nel problema di concentrare una massa unitaria nel solo punto $t = 0$. Vediamo chi è il limite in $\mathcal{D}'$:

$$\langle f_n(t), \varphi(t)\rangle = \frac{n}{2}\int_{-1/n}^{1/n} \varphi(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi\left(\frac{s}{n}\right) ds \qquad \left(t = \frac{s}{n}\right).$$

Poichè φ è limitata

$$\left|\varphi\left(\frac{s}{n}\right)\right| \le M \qquad \forall\, n$$

e la costante M è sommabile su $[-1, 1]$ si può passare al limite sotto il segno di integrale ottenendo

$$\langle f_n(t), \varphi(t)\rangle \xrightarrow{\mathbb{C}} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(0)ds = \varphi(0)\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} ds = \varphi(0) = \langle \delta(t), \varphi(t)\rangle.$$

Poichè questo vale per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ si ha

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta.$$

La delta di Dirac risponde al problema di concentrare una massa in un solo punto.

Ci sono molti modi di approssimare la δ attraverso funzioni; il precedente fa parte di questo schema generale:

1. prendiamo $f \in L^1(\mathbb{R})$ con $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$;

2. definiamo $f_n(t) = nf(nt)$

   (il cambio di scala in entrambi gli assi tende a concentrare la massa in $t = 0$ se $f(t)$ è reale e positiva e la si interpreta come densità lineare);

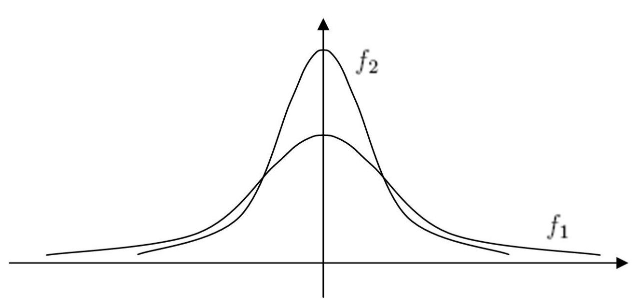
3. vale $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$. Infatti per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}\langle f_n(t), \varphi(t)\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} nf(nt)\varphi(t)dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\varphi\left(\frac{s}{n}\right) ds \xrightarrow{\mathbb{C}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\varphi(0)ds = \\ &= \varphi(0)\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)ds = \varphi(0) = \langle\delta(t), \varphi(t)\rangle\end{aligned}$$

$$\Big(\text{convergenza dominata} \quad \left|f(s)\varphi\left(\frac{s}{n}\right)\right| \leq M|f(s)| \in L^1\Big).$$

Come f si può prendere la Gaussiana $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$.

$$\text{Risulta:} \quad \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2t^2} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta(t).$$



$$\Big(\text{la massa unitaria viene concentrata in } t = 0 \text{ per } n \longrightarrow +\infty\Big).$$

La funzione

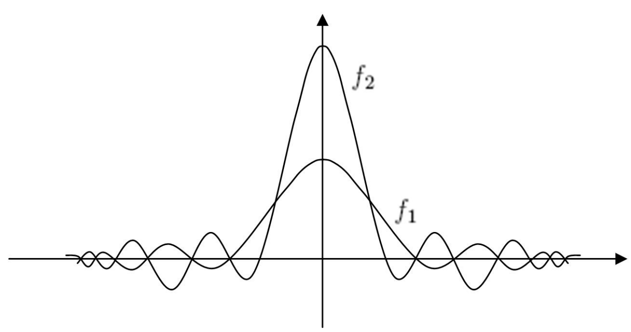
$$\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

non è sommabile ma ha integrale **semplicemente convergente** in $\mathbb{R}$ pari a 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(s)}{s} = 1.$$

Non si applica la convergenza dominata ma, come vedremo, vale lo stesso

$$n \operatorname{sinc}(nt) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta(t)$$



• **Derivate**

Sia f localmente assolutamente continua e φ una funzione test.
La derivata usuale è una distribuzione perchè $f' \in L^1_{loc}$. Vale l'integrazione per parti quindi

$$\begin{aligned}\langle f'(t), \varphi(t)\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\varphi(t) = [f(t)\varphi(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)dt = \\ &= -\langle f(t), \varphi'(t)\rangle\end{aligned}$$

$$\Big(\text{le funzioni test sono definitivamente nulle per } t \longrightarrow \pm\infty\Big).$$

Questo suggerisce di definire per una qualunque distribuzione u

$$\langle u'(t), \varphi(t)\rangle = -\langle u(t), \varphi'(t)\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}.$$

Questa è una buona definizione perchè φ' è ancora una funzione test e

$$\varphi \longmapsto -u(\varphi')$$

è ancora lineare e continua da $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ in $\mathbb{C}$ quindi è una distribuzione.
La distribuzione u' si può ancora derivare ottenendo una distribuzione u'' e così via:

$$\langle u^{(k)}(t), \varphi(t)\rangle = (-1)^k \langle u(t), \varphi^{(k)}(t)\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}.$$

Ogni distribuzione si può derivare infinite volte. Ad esempio

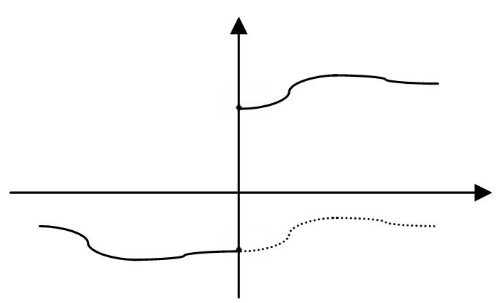
$$\begin{aligned}
\langle \delta'(t), \varphi(t)\rangle &= -\langle \delta(t), \varphi'(t)\rangle = -\varphi'(0) \\
\langle \delta''(t), \varphi(t)\rangle &= \langle \delta(t), \varphi''(t)\rangle = \varphi''(0) \\
\cdots \quad &= \quad \cdots
\end{aligned}$$

Per funzioni localmente assolutamente continue la derivata usuale identifica anche la derivata in $\mathcal{D}'$. Vediamo chi è la derivata del gradino unitario $H = 1_{[0,+\infty)}$ discussa nell'introduzione:

$$\begin{aligned}
\langle H'(t), \varphi(t)\rangle = -\langle H(t), \varphi'(t)\rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(t)dt = \\
= -[\varphi(t)]_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta(t), \varphi(t)\rangle
\end{aligned}$$

quindi $H' = \delta$. In maniera analoga per ogni **funzione assolutamente continua** $f(t)$, la funzione **con salto** s in $t = 0$

$$g(t) = f(t) + sH(t) = \begin{cases} f(t) & t < 0 \\ f(t) + s & t \geq 0 \end{cases}$$



ha per derivata nel senso di $\mathcal{D}'$

$$g' = f' + s\delta$$

dove f' indica la derivata usuale di f visto che per funzioni assolutamente continue essa coincide con la derivata nel senso delle distribuzioni. Infatti:

$$\begin{aligned}
\langle g', \varphi\rangle &= -\langle g, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi'(t)dt = \\
&= -\int_{-\infty}^{0} f(t)\varphi'(t) - \int_{0}^{+\infty} (f(t)+s)\varphi'(t)dt = \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)dt - s\int_{0}^{+\infty} \varphi'(t)dt = \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)dt + s\varphi(0) = \\
&= -\langle f, \varphi'\rangle + s\langle \delta, \varphi\rangle = \langle f', \varphi\rangle + \langle s\delta, \varphi\rangle \qquad \forall\ \varphi
\end{aligned}$$

da cui proprio $g' = f' + s\delta$.
La derivata nel senso di $\mathcal{D}'$ di $\log|t|$ non è la funzione $\dfrac{1}{t}$ che non identifica una distribuzione ma è $vp\dfrac{1}{t}$:

$$\begin{aligned}
\langle (\log|t|)', \varphi\rangle &= -\langle \log|t|, \varphi'(t)\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \log|t|\varphi'(t)dt = \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} -\int_{-\infty}^{-\epsilon} - \int_{\epsilon}^{+\infty} = \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \left(-\left[\log|t|\varphi(t)\right]_{-\infty}^{-\epsilon} - \left[\log|t|\varphi(t)\right]_{\epsilon}^{+\infty} + \int_{|t|\geq\epsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt \right) = \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|t|\geq\epsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt = \langle vp\frac{1}{t}, \varphi(t)\rangle \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}.
\end{aligned}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0} -\log\epsilon\varphi(-\epsilon) + \log\epsilon\varphi(\epsilon) &= \lim_{\epsilon\to 0} 2\epsilon\log\epsilon \cdot \left[\frac{\varphi(\epsilon)-\varphi(-\epsilon)}{2\epsilon}\right] = \\
&= 0 \cdot \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\varphi'(\epsilon)+\varphi'(-\epsilon)}{2} \qquad \text{(De L'Hospital)} \\
&= 0 \cdot \varphi'(0) = 0.
\end{aligned}$$

É essenziale che il limite dell'integrale sia preso in maniera simmetrica: per l'appunto in valor principale.
Concludiamo l'argomento derivata in $\mathcal{D}'$ evidenziando che:

- la usuale derivata e la derivata nel senso delle distribuzioni sono equivalenti solo per funzioni localmente assolutamente continue;

- l'operatore di derivata è lineare e **continuo** da $\mathcal{D}'$ a $\mathcal{D}'$:

$$(c_1u_1 + c_2u_2)' = c_1u_1' + c_2u_2'$$
$$u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u \Rightarrow u_n' \xrightarrow{\mathcal{D}'} u'.$$

• **Moltiplicazione per una funzione** C^∞
Mentre la somma di due distribuzioni è definita in maniera naturale e $\mathcal{D}'$ è in maniera naturale uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$, il prodotto di due distribuzioni non è definibile in generale. Basti pensare a

$$\frac{n}{2}\, 1_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$$

mentre $\dfrac{n^2}{4}\, 1_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}$ non ha limite in $\mathcal{D}'$:

$$\frac{n^2}{4}\int_{-1/n}^{1/n} \varphi(t)dt = \frac{n}{4}\int_{-1}^{1} \varphi\left(\frac{s}{n}\right) ds$$

non ha limite in $\mathbb{C}$ perchè

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi\left(\frac{s}{n}\right) ds \xrightarrow{\mathbb{C}} \varphi(0)$$

ma $\dfrac{n}{2} \longrightarrow +\infty$. Il limite in $\mathcal{D}'$, che dovrebbe essere "δ^2", non esiste!

Non ha senso la moltiplicazione $\delta \cdot \delta$, in generale non ha senso $u \cdot v$ con u, v generiche distribuzioni. Quello che ha significato è il prodotto $f \cdot u$ con $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ed $u \in \mathcal{D}'$ definito da

$$\langle f \cdot u, \varphi\rangle = \langle u, f \cdot \varphi\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}.$$

Ad esempio $t\delta = 0$:

$$\langle t\delta(t), \varphi(t)\rangle = \langle \delta(t), t\varphi(t)\rangle = 0 \cdot \varphi(0) = 0$$

mentre $t\delta' = -\delta$:

$$\begin{aligned}\langle t\delta'(t), \varphi(t)\rangle &= \langle \delta'(t), t\varphi(t)\rangle = -\langle \delta(t), (t\varphi(t))'\rangle = \\ &= -\langle \delta(t), \varphi(t)\rangle - \langle \delta(t), t\varphi'(t)\rangle = \\ &= -\varphi(0) - 0 \cdot \varphi'(0) = -\varphi(0) = -\langle \delta(t), \varphi(t)\rangle.\end{aligned}$$

Hanno sempre senso in particolare le moltiplicazioni di una distribuzione per $-it$ $(i\omega)$ o per $e^{-it_0\omega}$ $(e^{i\omega_0 t})$, fattori che compaiono nelle regole della $\mathcal{F}$-trasformata. Vedremo oltre quale senso ha la $\mathcal{F}$-trasformata di un distribuzione e quali sono le distribuzioni trasformabili.

• **Traslazione e riflessione**
Per $f \in L^1_{loc}$ si ha

$$\langle f(t-t_0), \varphi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\varphi(s+t_0)ds =$$

$$= \langle f(t), \varphi(t+t_0)\rangle \qquad (s = t - t_0)$$

e

$$\langle f(-t), \varphi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\varphi(-s)ds =$$

$$= \langle f(t), \varphi(-t)\rangle \qquad (s = -t).$$

Questo suggerisce di definire per una generica distribuzione

$$\langle u(t-t_0), \varphi(t)\rangle = \langle u(t), \varphi(t+t_0)\rangle,$$
$$\langle u(-t), \varphi(t)\rangle = \langle u(t), \varphi(-t)\rangle.$$

Utilizzeremo anche la notazione $\check{u}$ per $u(-t)$. Quindi, per definizione,

$$\langle \check{u}, \varphi\rangle = \langle u, \check{\varphi}\rangle \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Ad esempio, la traslata $\delta(t-t_0)$ risulta definita da

$$\langle \delta(t-t_0), \varphi(t)\rangle = \langle \delta(t), \varphi(t+t_0)\rangle = \varphi(t_0)$$

mentra la riflessa $\check{\delta}$ agisce come segue

$$\langle \check{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \check{\varphi} \rangle = \check{\varphi}(0) = \varphi(-0) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Vale $\check{\delta} = \delta$ o con notazione equivalente $\delta(-t) = \delta(t)$. In questo senso δ è "pari".

Invece $vp\frac{1}{t}$ è "dispari" cioè $\check{vp}\frac{1}{t} = -vp\frac{1}{t}$:

$$\langle \check{vp}\frac{1}{t}, \varphi \rangle = \langle vp\frac{1}{t}, \check{\varphi} \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|t| \geq \epsilon} \frac{\varphi(-t)}{t} dt = -\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|s| \geq \epsilon} \frac{\varphi(s)}{s} ds =$$

$$= -\langle vp\frac{1}{t}, \varphi \rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}.$$

Esercizio 2.1 Posto

$$f_n(t) = \frac{n}{1 + n^2 t^2}$$

provare, seguendo la definizione di limite in $\mathcal{D}'$, che

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \pi \delta.$$

A cosa converge di conseguenza

$$g_n(t) = \frac{n^2 t}{(1 + n^2 t^2)^2}$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$? $\Big($$f_n$ è assolutamente continua quindi f_n' nel senso di $\mathcal{D}'$ coincide con la usuale derivata. Inoltre se $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \pi\delta$ allora $f_n' \xrightarrow{\mathcal{D}'} \cdots$$\Big)$

Esercizio 2.2 (É utile tracciare prima i grafici)
Seguendo la definizione provare che in $\mathcal{D}'$

$$\big(1_{[a,b]}\big)' = \delta(t-a) - \delta(t-b)$$

e per $a > 0$

$$\big(t \cdot 1_{[0,a]}\big)' = 1_{[0,a]} - a\delta(t-a)$$

$$\Big(\text{derivata usuale più salto} \cdot \delta(t-t_0) \text{ dove } t_0 \text{ è punto di salto}\Big).$$

Alla stessa maniera provare poi che

$$\big(|t| \cdot 1_{[-a,a]}\big)' = \operatorname{sgn}(t) \cdot 1_{[-a,a]} + a\delta(t+a) - a\delta(t-a)$$

$$\Big(\text{sempre derivata usuale più delta di Dirac nei punti di salto}\Big).$$

Esercizio 2.3 Calcolare i prodotti $t\delta''$, $t\, vp\frac{1}{t}$, $t\left(vp\dfrac{1}{t}\right)'$.

$$\left(\text{Risultati: } -2\delta', 1, -vp\frac{1}{t}\right).$$

Esercizio 2.4 Provare che per $f \in C^\infty$ e $u \in \mathcal{D}'$

$$(fu)' = f'u + fu'$$

dopo aver interpretato correttamente le derivate e i prodotti che compaiono.

3 Le distribuzioni trasformabili

• Introduzione

Per $f \in L^1(\mathbb{R})$ sia f che $\widehat{f}$ sono in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ quindi identificano due distribuzioni. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vale

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{f}(\omega), \varphi(\omega)\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\varphi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\omega} dt\, d\omega = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\omega}\varphi(\omega)d\omega\, dt = \qquad \text{(Fulini + Tonelli)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\widehat{\varphi}(t)dt = \langle f(t), \widehat{\varphi}(t)\rangle.
\end{aligned}$$

Ciò porterebbe a "definire" per ogni distribuzione

$$\langle \widehat{u}, \varphi\rangle = \langle u, \widehat{\varphi}\rangle.$$

Questa però è una uguaglianza priva di significato perchè per $\varphi \in \mathcal{D}$, φ non identicamente nulla, $\widehat{\varphi}$ non è in $\mathcal{D}$ quindi perde di senso $\langle u, \widehat{\varphi}\rangle$. Infatti

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\omega}\varphi(t)dt$$

ammette il prolungamento complesso

$$\widehat{\varphi}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itz}\varphi(t)dt, \qquad z = \omega + i\sigma,$$

che risulta una funzione olomorfa di z: per la compattezza del supporto di φ si può derivare sotto il segno di integrale

$$\frac{d}{dz}\,\widehat{\varphi}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itz}(-it\varphi(t))dt$$

ottenendo una funzione continua di z: $\varphi(z)$ può avere solo **zeri isolati** in $\mathbb{C}$ in particolare non si può annullare su interi intervalli dell'asse reale!
A parte la funzione nulla si ha

$$\varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow \widehat{\varphi} \notin \mathcal{D}$$

$\Big($non si può localizzare contemporaneamente in tempo ed in frequenza$\Big)$.

Per dare senso a

$$\langle \widehat{u}, \varphi\rangle = \langle u, \widehat{\varphi}\rangle$$

bisogna cambiare lo spazio delle funzioni test.

• Lo spazio $\mathcal{S}$ delle funzioni rapidamente decrescenti
Si dice che $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ è **rapidamente decrescente** se per ogni $j, k \geq 0$

$$\left|t^k\varphi^{(j)}(t)\right| \longrightarrow 0 \qquad \text{per } t \longrightarrow \pm\infty.$$

La funzione φ e tutte le sue derivate sono infinitesimi di ordine superiore ad ogni potenza

$$\frac{1}{|t|^k} \qquad \text{per } t \longrightarrow \pm\infty.$$

Lo spazio di tutte tali φ si indica con $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (spazio di Schwarz).
Valgono le evidenti inclusioni

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}), \\ &\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}) \qquad \forall\, p \geq 1, \end{aligned}$$

dove la convergenza nello spazio a sinistra implica la convergenza nello spazio a destra del simbolo di inclusione dopo che si è definito $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ se per ogni $j, k \geq 0$

$$t^k \varphi_n^{(j)}(t) \longrightarrow t^k \varphi^{(j)}(t)$$

uniformemente su $\mathbb{R}$.
La proprietà fondamentale di $\mathcal{S}$ rispetto alla trasformata è la seguente:

Teorema 3.1
$\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ **è una biezione lineare e continua.**

Lo spazio $\mathcal{S}$, come L^2, è **invariante** rispetto ad $\mathcal{F}$. L'invarianza di $\mathcal{S}$ viene dal fatto che la derivazione e la moltiplicazione per potenze sono operatori duali: per $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} (i\omega)^k \widehat{\varphi}^{(j)}(\omega) &= (i\omega)^k \mathcal{F}((-it)^j \varphi(t))(\omega) = \\ &= \mathcal{F}\left(\frac{d^{\,k}}{dt^k}(-it)^j \varphi(t)\right)(\omega) \longrightarrow 0 \qquad \text{per } \omega \longrightarrow \pm\infty \end{aligned}$$

perchè qui vengono trasformate funzioni che stanno certamente in $L^1(\mathbb{R})$ visto il loro comportamento per $t \longrightarrow \pm\infty$ e la loro regolarità in $\mathbb{R}$. Questo mostra che anche $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$.

• Lo spazio $\mathcal{S}'$
Lo spazio $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dei funzionali u da $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{C}$ è uno spazio di distribuzioni: infatti da $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ segue

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

dal momento che la restrizione di u da $\mathcal{S}$ a $\mathcal{D}$ risulta lineare e continua su $\mathcal{D}$.
Vediamo le operazioni per $u \in \mathcal{S}'$:

- Convergenza. Sia u_n successione in $\mathcal{S}'$.

$$u_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} u \quad \text{se} \quad \langle u_n, \varphi\rangle \xrightarrow{\mathbb{C}} \langle u, \varphi\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}.$$

- Derivate. u' definita da

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}$$

è ancora in $\mathcal{S}'$ e l'applicazione $u \longmapsto u'$ è lineare e continua da $\mathcal{S}'$ ad $\mathcal{S}'$:

$$u_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} u \Rightarrow u'_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} u'.$$

- Traslazione e riflessione

$$\begin{aligned} \langle u(t-t_0), \varphi(t) \rangle &= \langle u(t), \varphi(t+t_0) \rangle \qquad && \forall\, \varphi \in \mathcal{S}, \\ \langle \check{u}, \varphi \rangle &= \langle u, \check{\varphi} \rangle && \forall\, \varphi \in \mathcal{S}, \end{aligned}$$

dove $\check{\varphi}(t) = \varphi(-t)$. Le distribuzioni $u(t-t_0)$, $\check{u}$ sono ancora in $\mathcal{S}'$.

- Moltiplicazione per una funzione regolare.
Non tutte le $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ sono ammissibili nella definizione

$$\langle fu, \varphi \rangle = \langle u, f\varphi \rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}$$

perchè non sempre $f\varphi \in \mathcal{S}$. Per definizione di $\mathcal{S}$ ciò accade quando

$$|f(t)| \le M|t|^N \qquad \text{per } t \longrightarrow \pm\infty$$

cioè quando f è limitata o cresce all'infinito al più in maniera polinomiale. Solo per tali $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ definiamo il prodotto fu, $u \in \mathcal{S}'$.
fu è ancora in $\mathcal{S}'$. Come f useremo spesso $-it$ $(i\omega)$ e $e^{i\omega_0 t}$ $(e^{-i\omega t_0})$.

Esempi notevoli di distribuzioni in $\mathcal{S}'$ sono:

1. La δ di Dirac. La convergenza $nf(nt) \longrightarrow \delta$ con

$$f \in L^1(\mathbb{R})\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1,$$

è valida anche in $\mathcal{S}'$ (vedi l'osservazione nel quarto punto).

2. $vp\dfrac{1}{t}$

3. Tutte le funzioni $f \in L^1_{loc}$ tali che $|f(t)| \leq M|t|^N$ (per $t \longrightarrow \pm\infty$) in particolare:

$$\text{il gradino unitario } H = 1_{[0,+\infty)}\,, \quad 1_{[a,b]}\,, \quad 1\,, \quad \operatorname{sgn} t,$$
$$e^{i\omega_0 t}\,, \quad \sin(\omega_0 t)\,, \quad \cos(\omega_0 t)\,, \quad t^k \;\; \forall\, k \geq 0.$$

4. Infine
$$L^p(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \qquad \forall\, p \geq 1,$$
in particolare sono in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ sia le funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ che quelle di $L^2(\mathbb{R})$.

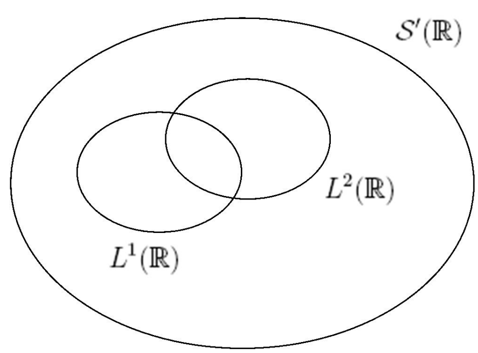
• Definizione di trasformata di una distribuzione in $\mathcal{S}'$
Per $u \in \mathcal{S}'$ ha senso definire

$$\langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}$$

perchè $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ come φ e l'applicazione

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \qquad \varphi \longmapsto u(\widehat{\varphi})$$

è lineare e continua. Gli elementi di $\mathcal{S}'$ sono le distribuzioni trasformabili. Le inclusioni
$$L^p \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$
hanno interpretazioni molto interessanti. In particolare la seconda inclusione ci dice che solo un sottospazio delle distribuzioni in $\mathcal{D}'$ è trasformabile.
La prima inclusione, che porta al diagramma insiemistico



consente di interpretare la $\mathcal{F}$ in L^1 ed L^2 all'interno di uno stesso ambiente.

Teorema 3.2
$\mathcal{F}: \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ è una biezione lineare e continua.
L'inversa $\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ è ben definita da

$$\mathcal{F}^{-1}(u) = \frac{1}{2\pi}\check{\mathcal{F}}(u),$$

in particolare per ogni $u \in \mathcal{S}'$ vale la formula di dualità

$$\widehat{\widehat{u}} = 2\pi\check{u}.$$

Sottolineiamo che $\mathcal{F}$ continua signica

$$u_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} u \Rightarrow \widehat{u_n} \xrightarrow{\mathcal{S}'} \widehat{u}.$$

Inoltre per ogni $u \in \mathcal{S}'$ valgono le proprietà

$$\begin{aligned} \widehat{u'} &= i\omega\widehat{u}, \\ \widehat{u}' &= (-itu)\widehat{\ }, \\ (u(t-t_0))\widehat{\ } &= e^{-it_0\omega}\widehat{u}, \\ \widehat{u}(\omega-\omega_0) &= (e^{i\omega_0 t}u)\widehat{\ }. \end{aligned}$$

Questo significa che, interpretando derivate, prodotti e trasformate correttamente, in $\mathcal{S}'$ si può sempre derivare e trasformare con **tutte le proprietà precedenti valide senza ulteriori condizioni**.

- **Alcune trasformate notevoli in $\mathcal{S}'$**

  - $\widehat{\delta} = 1$. Infatti
  $$\langle\widehat{\delta}, \varphi\rangle = \langle\delta, \widehat{\varphi}\rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = \langle 1, \varphi\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}.$$

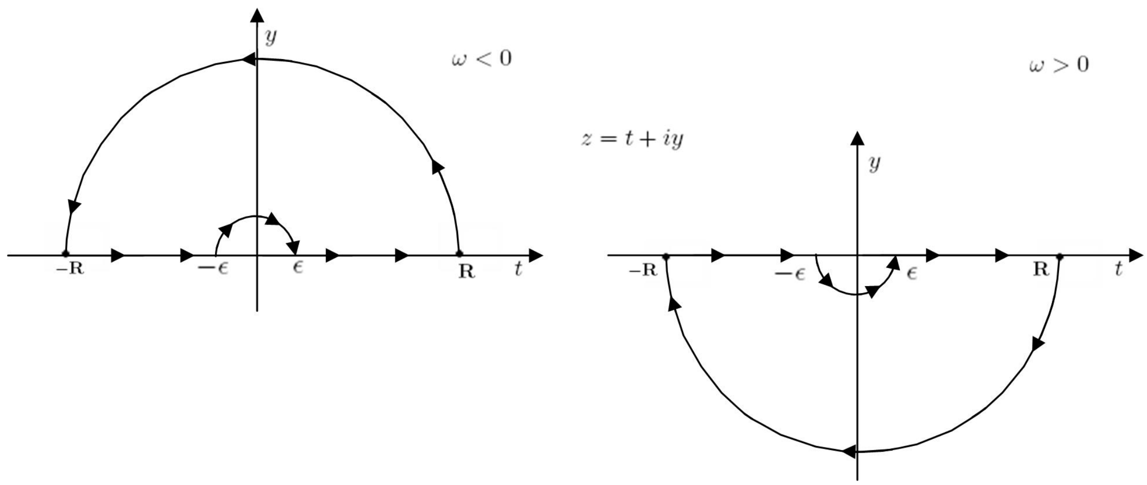
  - $\widehat{1} = 2\pi\delta$. Per dualità $\widehat{1} = \widehat{\widehat{\delta}} = 2\pi\check{\delta} = 2\pi\delta$. Anche direttamente
  $$\langle\widehat{1}, \varphi\rangle = \langle 1, \widehat{\varphi}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(\omega)d\omega = 2\pi\varphi(0) = \langle 2\pi\delta, \varphi\rangle$$
  dalla formula di inversione di $\widehat{\varphi}$ calcolata in $t = 0$.

  - $(e^{i\omega_0 t})\widehat{\ } = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$. Per traslazione
  $$(e^{i\omega_0 t}\cdot 1)\widehat{\ } = \widehat{1}(\omega-\omega_0) = 2\pi\delta(\omega-\omega_0).$$

- $(\cos(\omega_0 t))\widehat{\ } = \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$. Subito dalla precedente.
- $(\sin(\omega_0 t))\widehat{\ } = \pi i\delta(\omega-\omega_0)-\pi i\delta(\omega+\omega_0)$. Come sopra.
- Per
$$x(t) \overset{\mathcal{S}'}{=} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$
si ha
$$\widehat{x} \overset{\mathcal{S}'}{=} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0).$$
Lo spettro di frequenza di un segnale periodico è a righe, concentrato nei punti $k\omega_0$.
- $\left(\delta^{(k)}\right)\widehat{\ } = (i\omega)^k$. Subito dalla trasformata di una derivata e da $\widehat{\delta}=1$.
- $((-i)^k t^k)\widehat{\ } = 2\pi\delta^{(k)}$
$$((-it)^k \cdot 1)\widehat{\ } = (\widehat{1})^{(k)} = 2\pi\delta^{(k)}.$$
- $\widehat{\left(vp\frac{1}{t}\right)} = -\pi i \,\mathrm{sgn}(\omega)$
$$\begin{aligned}
\langle \widehat{\left(vp\frac{1}{t}\right)}, \varphi\rangle &= \langle vp\frac{1}{t}, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|t|\geq\epsilon} \frac{\widehat{\varphi}(t)}{t} dt = \\
&= \lim_{\substack{R\longrightarrow+\infty\\ \epsilon\longrightarrow 0}} \int_{\epsilon\leq|t|\leq R} \frac{\widehat{\varphi}(t)}{t} dt = \\
&= \lim_{\substack{R\longrightarrow+\infty\\ \epsilon\longrightarrow 0}} \int_{\epsilon\leq|t|\leq R} \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\varphi(\omega) d\omega\ dt = \\
&= \lim_{\substack{R\longrightarrow+\infty\\ \epsilon\longrightarrow 0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega) \int_{\epsilon\leq|t|\leq R} \frac{e^{-i\omega t}}{t} dt\ d\omega = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega) \lim_{\substack{R\longrightarrow+\infty\\ \epsilon\longrightarrow 0}} \int_{\epsilon\leq|t|\leq R} \frac{e^{-i\omega t}}{t} dt\ d\omega = \\
&= -\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega)\,\mathrm{sgn}(\omega) d\omega = -\pi i \langle \mathrm{sgn}(\omega), \varphi(\omega)\rangle
\end{aligned}$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ visto che

$$\lim_{\substack{R \longrightarrow +\infty \\ \epsilon \longrightarrow 0}} \int_{\epsilon \leq |t| \leq R} \frac{e^{-i\omega t}}{t} dt = -\pi i \operatorname{sgn}(\omega).$$



- $(\operatorname{sgn} t)\widehat{\ } = -2i \; vp\dfrac{1}{\omega}$. Per dualità

$$(\operatorname{sgn} t)\widehat{\ } = \frac{i}{\pi}\left(vp\frac{1}{t}\right)\widehat{\widehat{\ }} = \frac{i}{\pi}2\pi\left(vp\frac{1}{\omega}\right)\check{\ } = -2i \, vp\frac{1}{\omega} \qquad \left(vp\frac{1}{\omega} \text{ è dispari}\right).$$

- $\widehat{H} = \pi\delta(\omega) - i \, vp\dfrac{1}{\omega}$

  $H = 1_{[0,+\infty)}$ gradino unitario, $H = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$ quindi

$$\widehat{H} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{1} + \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(t))\widehat{\ } = \pi\delta(\omega) - i \; vp\frac{1}{\omega}$$

- Anche per $\operatorname{sinc}(t)$ vale

$$n \operatorname{sinc}(nt) \xrightarrow{\mathcal{S}'} \delta$$

  anche se $\operatorname{sinc} \notin L^1(\mathbb{R})$.

Infatti dallo schema di continuità di $\mathcal{F}$

$$\begin{tikzcd}
1_{[-n\pi,n\pi]} \arrow[r, "\mathcal{S}'"] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & 1 \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\
\left(1_{[-n\pi,n\pi]}\right)^{\widehat{}} \arrow[r, "\mathcal{S}'"] & 2\pi\delta
\end{tikzcd}$$

ricaviamo $\left(1_{[-n\pi,n\pi]}\right)^{\widehat{}} \xrightarrow{\mathcal{S}'} 2\pi\delta$ ma

$$\begin{aligned}
\left(1_{[-n\pi,n\pi]}\right)^{\widehat{}}(\omega) &= \int_{-n\pi}^{n\pi} e^{-it\omega} dt = \frac{e^{-i\omega n\pi} - e^{i\omega n\pi}}{-i\omega} = \\
&= 2\frac{\sin(n\pi\omega)}{\omega} = 2n\pi \operatorname{sinc}(n\omega)
\end{aligned}$$

da cui $n \operatorname{sinc}(n\omega) \xrightarrow{\mathcal{S}'} \delta(\omega)$.

Esercizio 3.3 Sia

$$f_n(t) = \frac{n}{1+n^2t^2}.$$

Sappiamo già che $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} \pi\delta$ (vedi esercizio pag. 17).

- A cosa converge $\widehat{f_n}$? Verificalo direttamente dal calcolo di $\widehat{f_n}$ e dalla definzione di limite in $\mathcal{S}'$.
- A cosa converge $g_n(t) = \dfrac{n^2t}{(1+n^2t^2)^2}$? E $\widehat{g_n}$?

  Verificare il limite di $\widehat{g_n}$ attraverso il calcolo diretto di $\widehat{g_n}(\omega)$.

Esercizio 3.4 Dalle seguenti funzioni $x(t)$ calcolare $\widehat{x}(\omega)$, la derivata x' nel senso delle distribuzioni, verificare la regola $\widehat{x'} = i\omega\widehat{x}$

(Falsa per la derivata usuale!).

- $x(t) = 1_{[-1,2]}(t)$;
- $x(t) = \text{sgn}(t)1_{[-1,1]}(t)$;
- $x(t) = t1_{[0,1]}(t)$;
- $x(t) = |t|1_{[-1,1]}(t)$.